Linearne diferencijalne jednačine drugog reda

Definicija 1. Jednačina oblika

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \tag{1}$$

naziva se linearna diferencijalna jednačina drugog reda.

Ako su $P(x)$, $Q(x)$ i $f(x)$ neprekidne funkcije na nekom intervalu $S \subset \mathbb{R}$, u teoriji diferencijalnih jednačina se dokazuje da jednačina (1) ima jedinstveno rešenje koje zadovoljava početni uslov

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0',$$

gde $x_0 \in S$ i $y_0,\ y_0' \in \mathbb{R}$.

Familija funkcija $y = \varphi(x_1, C_1, C_2)$, $x \in S$, gde su $C_1,\ C_2$ konstante naziva se opštim rešenjem jednačine (1) ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(i) te funkcije zadovoljavaju jednačinu (1);

(ii) sistem algebarskih jednačina

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x_0, C_1, C_2) & = & y_0 \\ \varphi'(x_0, C_1, C_2) & = & y_0' \end{array}$$

ima za sve $x_0 \in S$, y_0, $y_0' \in \mathbb{R}$ jedinstveno rešenje (C_1^0, C_2^0) tako da je funkcija $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ rešenje jednačine (1) koje zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'$.

Specijalno ako je $f(x) \equiv 0$, jednačina

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

naziva se linearna homogena diferencijalna jednačina drugog reda.

1 Homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{2}$$

Teorema 2. Ako su y_1 i y_2 rešenja jednačine (2), tada je $y = C_1y_1 + C_2y_2$ gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante, takodje njeno rešenje.

Dokaz. Ako se funkcija $y = C_1y_1 + C_2y_2$ i njen prvi i drugi izvod smene u (2), dobija se identitet

$$\begin{aligned} C_1y_1''(x) + C_2y_2''(x) + P(x)(C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x) + Q(x)(C_1y_1(x) + C_2y_2(x)) = \\ = C_1\left(y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y_1(x)\right) + C_2\left(y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)y_2(x)\right) \\ = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0. \ \square \end{aligned}$$

Definicija 3. Za realne funkcije $f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_n(x)$, definisane na nekom intervalu $S \subset \mathbb{R}$ kažemo da su linearno nezavisne na intervalu S ako za $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ iz

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0, \text{ za svako } x \in S,$$

sledi $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Funkcije koje nisu linearno nezavisne nazivaju se linearno zavisnim.

Primer 4. Funkcije

$$1,\ x,\ x^2, \ldots, x^n,\ x \in \mathbb{R}$$

su linearno nezavisne na $\mathbb{R}$, jer iz

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2 + \cdots + \lambda_{n+1}x^n = 0 \quad \text{za svako } x \in \mathbb{R}$$

sledi $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. $\square$

Primer 5. Funkcije

$$1, \sin^2 x, \cos^2 x, \quad x \in \mathbb{R}$$

su linearno zavisne na $\mathbb{R}$, jer važi

$$-1 \cdot 1 + 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x = 0 \quad \text{za svako } x \in \mathbb{R}.\square$$

Da bi se utvrdila linearna zavisnost funkcija f_1 i f_2 koristi se takozvana determinanta Vronskog (ili vronskijan):

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}$$

Teorema 6. Funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$ su linearno zavisna funkcije na intervalu $S \subset \mathbb{R}$ ako i samo ako je $W(x) = 0$ za svako $x \in S$.

Dokaz. Neka su $f_1(x)$ i $f_2(x)$ linearno zavisne funkcije na intervalu $S \subset \mathbb{R}$, tj. neka postoje realni brojevi λ_1 i λ_2 takvi da je bar jedan od njih različit od 0 i da je $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0$ za svako $x \in S$. Neka je $\lambda_1 \neq 0$. Tada je $f_1(x) = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} f_2(x)$, tj. $f_1(x) = k\, f_2(x)$ za $k = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$ i $x \in S$. Stoga je

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k\, f_2(x) & f_2(x) \\ k\, f_2'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} f_2(x) & f_2(x) \\ f_2'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = 0,$$

za svako $x \in S$.

Obrnuto, pretpostavimo da je $W(x) = 0$ za svako $x \in S$. Sledi

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{za svako } x \in S,$$

tj. $f_1(x) f_2'(x) - f_1'(x) f_2(x) = 0$ za svako $x \in S$. Prema tome,

$$\left(\frac{f_2}{f_1}\right)'(x) = \frac{f_1(x) f_2'(x) - f_1'(x) f_2(x)}{f_1^2(x)} = 0 \quad \text{za svako } x \in S,$$

te je funkcija $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$ konstantna na intervalu S. Dakle postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da je $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)} = \lambda$ za svako $x \in S$. Prema tome, $\lambda \cdot f_1(x) + (-1) \cdot f_2(x) = 0$ za svako $x \in S$ i funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$ su linearno zavisne na intervalu S. $\square$

Teorema 7. Neka je S interval na $\mathbb{R}$. Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:
(i) Rešenja $f_(x)$ i $f_2(x)$, $x \in S$ jednačine (2) su linearno nezavisna;
(ii)$(\exists x_0 \in S)\, W(x_0) \neq 0$;
(iii) $(\forall x \in S)\, W(x) \neq 0$.

Teorema 8. Neka su $f_1(x)$ i $f_2(x)$ linearno nezavisna rešenja jednačine (2) na intervalu $S \subset \mathbb{R}$. Tada je opšte rešenje ove jednačine na intervalu S

$$y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x),$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Dokaz. Iz Teoreme 2 sledi da je funkcija $y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$ rešenje jednačine (2) na intervalu S za sve vrednosti konstanti C_1 i C_2. Ostaje da se dokaže da se konstante C_1 i C_2 mogu na jedinstven način odrediti tako da bude zadovoljen početni uslov

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad x_0 \in S, \quad y_0,\ y_0' \in \mathbb{R}.$$

Iz $y(x_0) = y_0$ dobijamo $C_1 f_1(x_0)+C_2 f_2(x_0) = y_0$, a iz $y' = C_1 f_1'(x)+C_2 f_2'(x)$ i $y'(x_0) = y_0'$ dobijamo $C_1 f_1'(x_0) + C_2 f_2'(x_0) = y_0'$. Uočimo sistem od dve jenačine sa dve nepoznate C_1 i C_2:

$$\begin{aligned} C_1 f_1(x_0) + C_2 f_2(x_0) &= y_0 \\ C_1 f_1'(x_0) + C_2 f_2'(x_0) &= y_0' \end{aligned} \tag{3}$$

Kako su f_1 i f_2 linearno nezavisna rešenja na intervalu S, to je na osnovu Teoreme 7 vronsijan

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

To znači da je determinanta sistema (3) različita od 0, te na osnovu Kramerovog pravila ovaj sistem ima jedinstveno rešenje (C_1^0, C_2^0). $\Box$

2 Homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Jednačina oblika

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \tag{4}$$

naziva se homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Na osnovu Teoreme 8, da bi našli opŧe reěnje jednačine (4) dovoljno je naći dva linearno nezavisna rešenja ove jednačne.

Potražićemo ova rešenja u obliku $y = e^{kx}$, gde je $k \in \mathbb{R}$ konstanta. Kako je $y' = ke^{kx}$ i $y'' = k^2 e^{kx}$, smenom u jednačinu dobijamo

$$(k^2 + pk + q)e^{kx} = 0,$$

odakle sledi

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{5}$$

Jednačina (5) se zove *karakteristična jednačina* jednačine (4).

Razlikovaćemo tri slučaja.

1. Ako je $p^2 - 4q > 0$, onda jednačina (5) ima dva različita realna rešenja k_1 i k_2 i funkcije $y_1 = e^{k_1 x}$ i $y_2 = e^{k_2 x}$ rešenja jednačine (4). Primetimo da su funkcije $y_1 = e^{k_1 x}$ i $y_2 = e^{k_2 x}$ linearno nezavisne jer $\dfrac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const$ $(k_1 \neq k_2)$, drugim rečima, jer je vronskijan

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2)x}(k_2 - k_1) \neq 0.$$

Na osnovu Teoreme 8, opšte rešenje jednačine (4) je

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

2. Ako je $p^2 - 4q = 0$, onda su rešenja karakteristične jednačine k_1 i k_2 realna i jednaka. Prema tome, jedno rešenje jednačine (4) je $y_1 = e^{k_1 x}$. Pokazaćemo da je $y_2 = x e^{k_1 x}$ takođe rešenje jednačine (4). Kako je

$$y_2' = e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x} = (1 + k_1 x) e^{k_1 x},$$

$$y_2'' = k_1 e^{k_1 x} + k_1 (1 + k_1 x) e^{k_1 x} = k_1 (2 + k_1 x) e^{k_1 x},$$

zamenom u jednačinu (4) dobijamo

$$k_1(2+k_1 x)e^{k_1 x} + p(1+k_1 x)e^{k_1 x} + q x e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(2k_1 + p + x(k_1^2 + p k_1 + q)). \tag{6}$$

Kako je k_1 rešenje karakteristične jednačine, to je $k_1^2 + p k_1 + q = 0$, a iz $k_1 = \dfrac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \dfrac{-p + 0}{2} = \dfrac{-p}{2}$ sledi $2k_1 + p = 0$. Prema tome, desna strana jednakosti u (6) je jednaka 0 i time smo dokazali da je $y_2 = x e^{k_1 x}$ rešenje jednačine (4).

Rešenja $y_1 = e^{k_1 x}$ i $y_2 = x e^{k_1 x}$ su linearno nezavisna, pa je opšte rešenje jednačine (4)

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

3. Ako je $p^2 - 4q < 0$, onda karakteristična jednačina ima par konjugovano kompleksnih rešenja $k_1 = \alpha + i\beta$ i $k_2 = \alpha - i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Na osnovu Ojlerove formule je

$$e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

što nam sugeriše da su funkcije $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ i $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ rešenja jednačine (4). Nije teško proveriti da to zaista jeste tako, i kako su ove funkcije linearno nezavisne, sledi da je

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

opšte rešenje jednačine (4), gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Primer 9. Rešiti jednačinu

$$y'' - y' - 2\,y = 0. \tag{7}$$

Rešenje: Karakteristična jednačina ove jednačine je

$$k^2 - k - 2 = 0.$$

Njena rešenja su $k_1 = -1$ i $k_2 = 2$, pa je opšte reěnje jednačine (7)

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x},$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Primer 10. Rešiti jednačinu

$$y'' - 4\,y' + 4\,y = 0. \tag{8}$$

Rešenje: Karakteristična jednačina ove jednačine je

$$k^2 - 2k + 4 = 0, \text{ tj. } (k-2)^2 = 0.$$

Njeno rešenje je $k_1 = 2$, pa je opšte rešenje jednačine (8)

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x\, e^{2x} = e^{2x}(C_1 + C_2 x),$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Primer 11. Naći ono rešenje jednačine

$$y'' - 2\,y' + 2\,y = 0 \tag{9}$$

koje zadovoljava uslov

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \tag{10}$$

Rešenje: Karakteristična jednačina ove jednačine je

$$k^2 - 2k + 2 = 0.$$

Njena rešenja su $k_1 = 1 + i$ i $k_2 = 1 - i$, pa je opšte rešenje jednačine (9)

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x), \tag{11}$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Nađimo sada rešenje jednačine (9) koje zadovoljava početni uslov (10).

Iz (11) sledi

$$y(0) = 0 \Longrightarrow C_1 = 0,$$

i

$$y'(0) = 1 \Longrightarrow C_1 + C_2 = 1 \Longrightarrow C_2 = 1 - C_1 = 1.$$

Traženo rešenje je $y_p = e^x \sin x$.

Primer 12. Rešiti jednačinu

$$y'' - 4\,y' + 13\,y = 0. \tag{12}$$

Rešenje: Karakteristična jednačina ove jednačine je

$$k^2 - 4k + 13 = 0.$$

Njena rešenja su $k_1 = 2 + 3i$ i $k_2 = 2 - 3i$, pa je opšte rešenje jednačine (12)

$$y = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x),$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

3 Linearna nehomogena jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Jednačina oblika

$$y'' + p\,y' + q\,y = f(x) \tag{13}$$

naziva se linearna nehomogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Ako je funkcija f neprekidna na nekom intervalu $S \subset \mathbb{R}$, onda ova jednačina kao specijalan slučaj jednačine (1) ima jedinstveno rešenje koje zadovoljava uslov $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ za svako $x_0 \in S$ i $y_0, y_0' \in \mathbb{R}$. Sledeća teorema pokazuje da je opšte rešenje jednačine (13) jednako zbiru opšteg rešenja odgovarajuće homogene jednačine i jednog posebnog rešenja jednačine (13).

Teorema 13. Neka je $y = y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, $x \in S$, opšte rešenje homogene jednačine (4), gde su y_1 i y_2 dva linearno nezavisna rešenja te jednačine. Ako je $y = y_p(x)$, $x \in S$, bilo koje rešenje nehomogene jednačine (13), tada je

$$y = y_h(x) + y_p(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x),\ x \in S, \tag{14}$$

opšte rešenje jednačine (13), gde su C_1 i C_2 su proizvoljne konstante.

Dokaz. Iz (14) sledi

$$y' = y_h'(x) + y_p'(x), \quad y'' = y_h''(x) + y_p''(x),$$

te je

$$
\begin{aligned}
y'' + p\,y' + q\,y &= y_h''(x) + y_p''(x) + p\,(y_h'(x) + y_p'(x)) + q\,(y_h(x) + y_p(x)) \\
&= (y_h'' + p\,y_h' + q\,y_h) + (y_p'' + p\,y_p' + q\,y_p) = 0 + f(x) = f(x),
\end{aligned}
$$

jer je izraz u prvoj zagradi jednak 0 (y_h je rešenje homogene jednačine (4)), a izraz u drugoj zagradi je jednak $f(x)$ budući da je y_p rešenje nehomogene jednačine (13). Prema tome, $y = y_h(x) + y_p(x)$ je rešenje jednačine (13).

Pokažimo sada da se za zadate početne uslove $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, $x_0 \in S$, $y_0, y_0' \in \mathbb{R}$ mogu jednoznačno odrediti konstante C_1^0 i C_2^0 tako da je funkcija $y = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + y_p(x)$ rešenje jednačine (13) koje zadovoljava date početne uslove.

Zaista sistem

$$
\begin{aligned}
y_h(x_0) + y_p(x_0) &= y_0, \\
y_h'(x_0) + y_p'(x_0) &= y_0',
\end{aligned}
$$

tj.

$$
\begin{aligned}
C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + y_p(x_0) &= y_0, \\
C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + y_p'(x_0) &= y_0',
\end{aligned}
$$

od dve linearne jednačine sa dve nepoznate C_1 i C_2 ima jedinstveno rešenje jer je determinanta sistema

$$
W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}
$$

na osnovu Teoreme 7 različita od 0. $\square$

Za neke posebne oblike funkcije f moguće je jednostavno odrediti partikularno rešenje jednačine (13).

1. Neka je

$$
f(x) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0) e^{\alpha x}.
$$

Ako α nije koren karakteristične jednačine $k^2 + p\,k + q = 0$, partikularno rešenje jednačine (13) tražimo u obliku

$$
y_p(x) = (A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_0) e^{\alpha x},
$$

ako je α jednostruki koren karakteristične jednačine u obliku

$$
y_p(x) = x(A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_0) e^{\alpha x},
$$

a ako je α dvostruki koren karakteristične jednačine u obliku

$$
y_p(x) = x^2(A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_0) e^{\alpha x}.
$$

Primer 14. Rešiti jednačinu

$$y'' + y' + y = x^2 + 2. \tag{15}$$

Rešenje: Karakteristična jednačina je

$$k^2 + k + 1 = 0.$$

Njena rešenja su $k_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $k_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, pa je opšte rešenje homogene jednačine $y'' + y' + y = 0$

$$y_h = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x),$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Desna strana jednačine (15) je oblika $f(x) = P_2(x)e^{0\cdot x}$, gde je $P_2(x)$ polinom drugog stepena, i budući da $\alpha = 0$ nije koren karakteristične jednačine, to se partikularno rešenje jednačine (15) traži u obliku

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

gde su A, B i C konstante koje treba odrediti.

Kako je $y_p' = 2Ax + B$, a $y_p'' = 2A$, zamenom u jednačinu (15) dobijamo

$$\begin{gathered} 2A + 2Ax + B + Ax^2 + Bx + C = x^2 + 2 \\ Ax^2 + (2A + B)x + 2A + B + C = x^2 + 2. \end{gathered}$$

Odavde sledi

$$A = 1, \quad 2A + B = 0, \quad 2A + B + C = 2,$$

tj. $A = 1$, $B = -2$, $C = 2$, te je $y_p(x) = x^2 - 2x + 2$.

Prema tome, opšte rešenje jednačine (15) je

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x) + x^2 - 2x + 2.$$

Primer 15. Rešiti jednačinu

$$y'' - 4y = e^{2x}. \tag{16}$$

Rešenje: Karakteristična jednačina je

$$k^2 - 4 = 0,$$

i njena rešenja su $k_1 = 2$ i $k_2 = -2$, pa je opšte rešenje homogene jednačine $y'' - 4y = 0$

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x},$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Desna strana jednačine (16) je oblika $f(x) = P_0(x)e^{2x}$, gde je $P_0(x)$ polinom nultog stepena, i kako je $\alpha = 2$ jednostruki koren karakteristične jednačine, to partikularno rešenje jednačine (16) tražimo u obliku

$$y_p(x) = Axe^{2x},$$

gde je A konstanta koju treba odrediti.

Sada je $y_p' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} = A(1+2x)e^{2x}$ i $y_p'' = 4A(1+x)e^{2x}$, i zamenom u jednačinu (16) dobijamo

$$\begin{aligned} 4A(1+x)e^{2x} - 4Axe^{2x} &= e^{2x} \\ 4A(1+x) - 4Ax &= 1 \\ 4A &= 1 \\ A &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Sledi $y_p(x) = \frac{1}{4}xe^{2x}$ i opšte rešenje jednačine (16) je

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}xe^{2x}.$$

Primer 16. Rešiti jednačinu

$$y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x. \tag{17}$$

Uputstvo: Karakteristična jednačina je

$$k^2 - 7k + 6 = 0,$$

i njena rešenja su $k_1 = 1$ i $k_2 = 6$. Opšte rešenje homogene jednačine je

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{6x}.$$

Desna strana jednačine (17) je oblika $f(x) = P_1(x)e^x$, gde je $P_1(x)$ polinom prvog stepena, i kako je $\alpha = 1$ jednostruki koren karakteristične jednačine, to partikularno rešenje jednačine (16) tražimo u obliku

$$y_p(x) = x(Ax+B)e^x.$$

Primer 17. Rešiti jednačinu

$$y'' - 2y' + y = (x-2)e^x. \tag{18}$$

Uputstvo: Karakteristična jednačina je

$$k^2 - 2k + 1 = 0,$$

i $k_1 = 1$ je dvostruki koren ove jednačine. Opšte rešenje homogene jednačine je

$$y_h = e^x(C_1 + C_2x).$$

Partikularno rešenje jednačine (18) se traži u obliku

$$y_p(x) = x^2(Ax + B)e^x.$$

2. Neka je

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

gde su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi.

Ako $\alpha + i\beta$ nije koren karakteristične jednačine $k^2 + p\,k + q = 0$, partikularno rešenje jednačine (13) tražimo u obliku

$$y_p(x) = R_r(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + S_r(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

a ako je $\alpha + i\beta$ koren karakteristične jednačine, partikularno rešenje jednačine (13) tražimo u obliku

$$y_p(x) = x(R_r(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + S_r(x)e^{\alpha x}\sin\beta x),$$

gde je $r = \max\{m, n\}$, a R_r i S_r su polinomi stepena r sa neodređenim koeficijentima.

Jedan važan oblik funkcije $f(x)$ je

$$f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x,$$

gde su M i N konstante.

Ako βi nije koren karakteristične jednačine, partikularno rešenje se traži u obliku

$$y_p(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x,$$

a ako je βi koren karakteristične jednačine, onda se partikularno rešenje traži u obliku

$$y_p(x) = x(A\cos\beta x + B\sin\beta x),$$

gde su A i B nepoznate konstante.

Primer 18. Rešiti jednačinu

$$y'' + 4y = \cos 2x. \tag{19}$$

Rešenje: Karakteristična jednačina je

$$k^2 + 4 = 0,$$

i njena rešenja su $k_1 = -2i$ i $k_2 = 2i$, pa je opšte rešenje homogene jednačine $y'' + 4y = 0$

$$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Desna strana jednačine (19) je oblika $f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x$, gde je $M = 1$, $N = 0$ i $\beta = 2$, i kako je $\beta i = 2i$ koren karakteristične jednačine, to partikularno rešenje jednačine (19) tražimo u obliku

$$y_p(x) = x(A\cos 2x + B\sin 2x),$$

gde su A i B konstante koje treba odrediti.

Sada je $y_p' = 2x(-A\sin 2x + B\cos 2x) + (A\cos 2x + B\sin 2x)$ i $y_p'' = -4x(-A\cos 2x - B\sin 2x) + 4(-A\sin 2x + B\cos 2x)$. Smenom y_p i y_p'' u jednačinu (19) dobijamo

$$-4x(A\cos 2x + B\sin 2x) - 4A\sin 2x + 4B\cos 2x + 4x(A\cos 2x + B\sin 2x) = \cos 2x.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz $\cos 2x$ i $\sin 2x$ dobija se sistem jednačina

$$\begin{aligned} -4A &= 0, \\ 4B &= 1. \end{aligned}$$

Sledi $A = 0$ i $B = \dfrac{1}{4}$, te je $y_p(x) = \dfrac{1}{4}x\sin 2x$ i opšte rešenje jednačine (19) je

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}x\sin 2x.$$

Primer 19. Rešiti jednačinu

$$y'' - 4y = e^x \sin x. \tag{20}$$

Rešenje: Karakteristična jednačina je

$$k^2 - 4 = 0,$$

i njena rešenja su $k_1 = -2$ i $k_2 = 2$, pa je opšte rešenje homogene jednačine $y'' - 4y = 0$

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x},$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Desna strana jednačine (20) je oblika $f(x) = Me^{\alpha x}\cos\beta x + Ne^{\alpha x}\sin\beta x$, gde je $M = 1$, $N = 0$, $\alpha = 1$ i $\beta = 2$, i kako je $\alpha + \beta i = 1 + i$ nije koren karakteristične jednačine, to partikularno rešenje jednačine (20) tražimo u obliku

$$y_p(x) = Ae^x\cos x + Be^x\sin x = e^x(A\cos x + B\sin x),$$

gde su A i B konstante koje treba odrediti.

Sada je $y_p' = e^x(A\cos x + B\sin x) + e^x(-A\sin x + B\cos x) = e^x((A + B)\cos x + (B - A)\sin x)$ i $y_p'' = e^x((A+B)\cos x + (B-A)\sin x) + e^x(-(A + B)\sin x + (B - A)\cos x) = e^x(2B\cos x - 2A\sin x)$. Smenom y_p i y_p'' u jednačinu (20) dobijamo

$$e^x(2B\cos x - 2A\sin x) - 4e^x(A\cos x + B\sin x) = e^x\sin x.$$

i delenjem jednačine sa e^x dobijamo

$$2B\cos x - 2A\sin x - 4(A\cos x + B\sin x) = \sin x.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz $\cos x$ i $\sin x$ dobija se sistem jednačina

$$\begin{aligned} -2A - 4B &= 1, \\ -4A + 2B &= 0. \end{aligned}$$

Sledi $A = -\dfrac{1}{10}$ i $B = -\dfrac{1}{5}$, te je $y_p(x) = e^x(-\dfrac{1}{10}\cos x - \dfrac{1}{5}\sin x)$ i opšte rešenje jednačine (20) je

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + e^x(-\frac{1}{10}\cos x - \frac{1}{5}\sin x).$$

Primer 20. Rešiti jednačinu

$$y'' - 4y' + 13y = e^{2x}\cos 3x. \tag{21}$$

Rešenje: Karakteristična jednačina je

$$k^2 - 4k + 13 = 0,$$

i njena rešenja su $k_1 = 2 - 3i$ i $k_2 = 2 + 3i$, pa je opšte rešenje homogene jednačine $y'' - 4y' + 13y = 0$

$$y_h = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x),$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Desna strana jednačine (21) je oblika $f(x) = P_0(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_0(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, gde je $P_0(x) = 1$, $Q_0(x) = 0$, $\alpha = 2$ i $\beta = 3$, i kako je $\alpha + \beta i = 2 + 3i$ koren karakteristične jednačine, to partikularno rešenje jednačine (21) tražimo u obliku

$$y_p(x) = x(Ae^{2x}\cos 3x + Be^{2x}\sin 3x) = xe^x(A\cos 2x + B\sin 2x),$$

gde su A i B konstante koje treba odrediti.

Kada se y_p, y_p' i y_p'' smene u jednačinu (21) dobija se

$$(-6A\sin 3x + 6B\cos 3x)e^{2x} = e^{2x}\cos 3x.$$

Odavde delenjem jednačine sa e^{2x} i izjednačavanjem koeficijenata uz $\cos 3x$ i $\sin 3x$ dobijamo

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{6}.$$

Prema tome, $y_p(x) = \dfrac{1}{6}xe^{2x}\sin 3x$ i opšte rešenje jednačine (21) je

$$y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + \frac{1}{6}xe^{2x}\sin 3x.$$

Ako je data diferencijalna jednačina oblika

$$y'' + p\,y' + q\,y = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x),$$

onda je njeno partikularno rešenje

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_n},$$

gde su y_{p_i} partikularno rešenje jednačine

$$y'' + p\,y' + q\,y = f_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Primer 21. Rešiti jednačinu

$$y'' - 3y' + 2y = 4x + e^x. \tag{22}$$

Rešenje: Karakteristična jednačina je

$$k^2 - 3k + 2 = 0,$$

i njena rešenja su $k_1 = 1$ i $k_2 = 2$, pa je opšte rešenje homogene jednačine $y'' - 3y' + 2y = 0$

$$y_h = C_1e^x + C_2e^{2x},$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Partikularno rev senje koje odgovara funkciji $f(x) = 4x$, tj. partikularno rev senje jednačine

$$y'' - 3y' + 2y = 4x \tag{23}$$

tražimo u obliku $y_{p_1}(x) = Ax + B$. Smenom $y'_{p_1}(x) = A$ i $y''_{p_1}(x) = 0$ u jednačinu (23) dobijamo

$$-3A + 2Ax + 2B = 4x$$

odakle sledi sistem

$$\begin{aligned} 2A &= 4 \\ -3A + 2B &= 0, \end{aligned}$$

te je $A = 2$ i $B = 3$. Prema tome, $y_{p_1}(x) = 2x + 3$.

Partikularno rev senje jednačine

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \tag{24}$$

tražimo u obliku $y_{p_2}(x) = Axe^x$. Kako je $y'_{p_2}(x) = Ae^x + Axe^x = Ae^x(1+x)$ i $y''_{p_2}(x) = Ae^x(1+x) + Ae^x = Ae^x(2+x)$, smenom u jednačinu (24) dobijamo

$$\begin{aligned} Ae^x(2+x) - 3Ae^x(1+x) + 2Axe^x &= e^x \\ A(2+x) - 3A(1+x) + 2Ax &= 1 \\ -A &= 1 \\ A &= -1. \end{aligned}$$

Prema tome, $y_{p_2}(x) = -xe^x$ i opšte rešenje jednačine (22) je

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 2x + 3 - xe^x.$$

4 Lagranžov metod varijacije konstanata za nehomogenu linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Neka je data jednačina

$$y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = f(x), \tag{25}$$

gde su $p,\ q \in \mathbb{R}$ i $f(x)$ neprekidna funkcija na nekom intervalu $S \subset \mathbb{R}$.

Neka su $z_1(x)$ i $z_2(x)$ linearno nezavisna rešenja homogene jednačine $y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = 0$. Prema tome,

$$z_1''(x) + p\,z_1'(x) + q\,z_1(x) = 0, \quad z_2''(x) + p\,z_2'(x) + q\,z_2(x) = 0 \tag{26}$$

$$\begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ za svako } x \in S.$$

Opšte rešenje jednačine (25) tražićemo u obliku

$$y(x) = C_1(x)z_1(x) + C_2(x)z_2(x),$$

gde su $C_1(x)$ i $C_2(x)$ nepoznate funkcije. Odavde je

$$y'(x) = C_1'(x)z_1(x) + C_2'(x)z_2(x) + C_1(x)z_1'(x) + C_2(x)z_2'(x).$$

Uzećemo da je

$$C_1'(x)z_1(x) + C_2'(x)z_2(x) = 0, \tag{27}$$

pa je

$$y'(x) = C_1(x)z_1'(x) + C_2(x)z_2'(x),$$

i

$$y''(x) = C_1'(x)z_1'(x) + C_2'(x)z_2'(x) + C_1(x)z_1''(x) + C_2(x)z_2''(x).$$

Zamenom $y(x)$, $y'(x)$ i $y''(x)$ u jednačinu (25) dobijamo

$$\begin{aligned} C_1'(x)z_1'(x) + C_2'(x)z_2'(x) + C_1(x)z_1''(x) + C_2(x)z_2''(x) \\ +p\,(C_1(x)z_1'(x) + C_2(x)z_2'(x)) + q\,(C_1(x)z_1(x) + C_2(x)z_2(x)) = f(x), \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} C_1'(x)z_1'(x) + C_2'(x)z_2'(x) + C_1(x)(z_1''(x) + p\,z_1'(x) + q\,z_1(x)) + \\ +C_2(x)(z_2''(x) + p\,z_2'(x)) + q\,z_2(x)) = f(x), \end{aligned}$$

i s obzirom na (26) sledi

$$C_1'(x)z_1'(x) + C_2'(x)z_2'(x) = f(x). \tag{28}$$

Jednačne (27) i (28) čine sistem

$$\begin{aligned} C_1'(x)z_1(x) + C_2'(x)z_2(x) = 0, \\ C_1'(x)z_1'(x) + C_2'(x)z_2'(x) = f(x), \end{aligned} \tag{29}$$

iz koga ćemo odrediti funkcije $C_1'(x)$ i $C_2'(x)$.

Determinanta ovog sistema je

$$W(x) = \begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{za svako } x \in S,$$

pa je na osnovu Kramerovog pravila

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & z_2(x) \\ f(x) & z_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{-f(x)z_2(x)}{z_1(x)z_2'(x) - z_1'(x)z_2(x)}$$

i

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} z_1(x) & 0 \\ z_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{z_1(x)f(x)}{z_1(x)z_2'(x) - z_1'(x)z_2(x)}.$$

Odavde je

$$C_1(x) = \int \frac{-f(x)z_2(x)}{z_1(x)z_2'(x) - z_1'(x)z_2(x)}dx \quad \text{i} \quad C_2(x) = \int \frac{z_1(x)f(x)}{z_1(x)z_2'(x) - z_1'(x)z_2(x)}dx,$$

pa je $C_1(x) = g_1(x) + D_1$ i $C_2(x) = g_2(x) + D_2$.

Opšte rešenje jednačine (25) je

$$y = C_1(x)z_1(x)+C_2(x)z_2(x) = D_1z_1(x)+D_2z_2(x)+g_1(x)z_1(x)+g_2(x)z_2(x).$$

Primer 22. Naći opšte rešenje jednačine

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right). \tag{30}$$

Karakteristična jednačina je

$$k^2 + 4 = 0,$$

i njena rešenja su $k_1 = -2i$ i $k_2 = 2i$, pa se opšte rešenje jednačine (30) traži u obliku

$$y = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x.$$

Odgovarajući sistem je

$$C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0,$$
$$C_1'(x)(\cos 2x)' + C_2'(x)(\sin 2x)' = \frac{1}{\cos 2x},$$

tj.

$$C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0,$$
$$C_1'(x)(-2\sin 2x) + C_2'(x)(2\cos 2x) = \frac{1}{\cos 2x}.$$

Prema tome,

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \dfrac{1}{\cos 2x} & 2\cos 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}} = \frac{-\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}}{2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x} = -\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$$

i

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \dfrac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}.$$

Odavde

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\frac{1}{2}\int \operatorname{tg} 2x\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx = |\text{smena } \cos 2x = t,\ -2\sin 2x dx = dt| \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\ln|t| + D_1 = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + D_1, \end{aligned}$$

i

$$C_2(x) = \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}x + D_2.$$

Opšte rešenje jednačine (30) je

$$y = D_1\cos 2x + D_2\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x \ln|\cos 2x| + \frac{1}{2}x\sin 2x.$$

Primetimo da se ovde za interval promenljive x može uzeti bilo koji interval na kome je $\cos 2x \neq 0$.